Iteracije sistema funkcija

Da li je moguće za neki Julija skup ili Mandelbrot skup nacrtati njegovu granicu tako da taj fraktal bude čudan atraktor za neko preslikavanje?

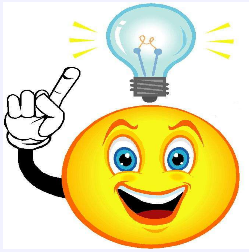
Cilj:

Na taj način bi umesto da za svaku tačku formiramo niz koji odlučuje da li tacku bojimo ili ne, formirali samo jedan niz (kao npr. kod Henonovog atraktora) koji crta sve tačke tog niza (eventualno počevši od neke, npr. 200)

Problem:

Za svaku tačku koja ne pripada Julija skupu, niz $z_{n+1} = z_n^2 + c$ divergira, tj. odbija tačke od Julija skupa (umesto da privlači) - granica Julija skupa nije atraktor tog preslikavanja!

Ideja:



Ako preslikavanje $F : z \to z^2 + c$ odbija tačke od Julija skupa, da li će njemu inverzno preslikavanje F^{-1} da ih privlači ka Julija skupu?

$$
\begin{aligned}
z &= x + iy, x = Re(z), y = Im(z) \\
C &= a + ib \\
F(x, y) &= z^2 + c \\
&= (x + iy)^2 + (a + ib) \\
&= x^2 + 2ixy - y^2 + a + ib \\
&= x^2 - y^2 + a + i(2xy + b) \\
F(x, y) &= (x^2 - y^2 + a, 2xy + b)
\end{aligned}
$$

Direktno: $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F(x_n, y_n)$

Inverzno: $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F^{-1}(x_n, y_n)$

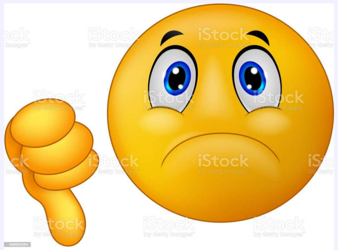
Novi problem:

$F^{-1}(x,y)$ nije jednoznačno određena.
1 tačka se slika u 2 različite tačke.

$$\boxed{F^{-1}(x,y) = \left(\pm f(x,y), \pm\frac{y-b}{2f(x,y)}\right)}$$

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{2}}$$

Eksponencijalna složenost
1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024... tačaka



(Loše) rešenje problema:

Opredelimo se samo za jednu od 2 slike, npr.

$F^{-1}(x,y) = \left(+f(x,y), +\frac{y-b}{2f(x,y)}\right)$

Posledica:

Ne dobijamo celu sliku (celu granicu Julijinog skupa), nego samo njen deo.

(Dobro) rešenje problema:

Svaki sledeći član niza se određuje koristeći samo jednu kombinaciju $(\pm ..., \pm ...)$, a izbor kombinacije u tekućoj iteraciji zavisi od unapred zadatih verovatnoća.

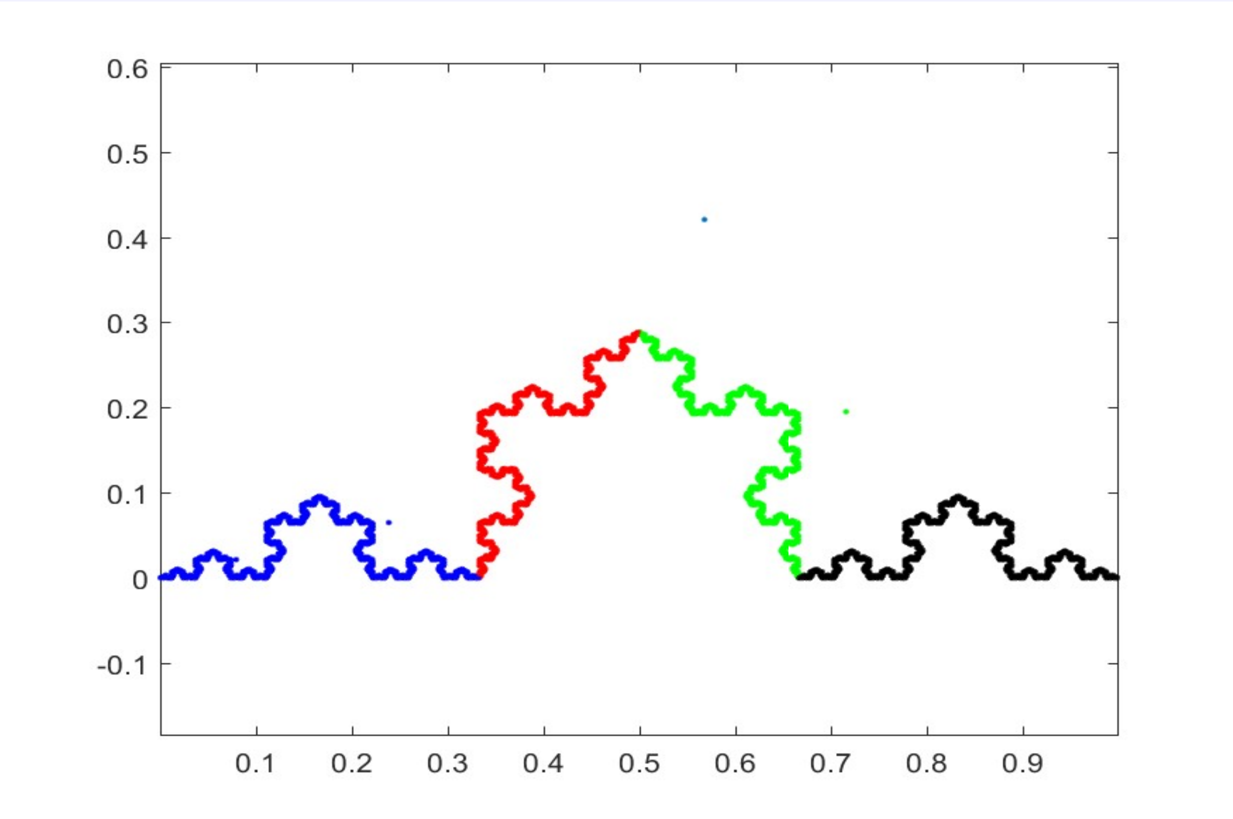
Iteracije sistema funkcija (IFS)

- Zadatih k preslikavanja ravni u ravan: $F_1(x, y), F_2(x, y), ..., F_k(x, y)$.
- Svakom preslikavanju je pridružena verovatnoća $p_1, p_2, ..., p_k$.
- $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ (naravno).
- Izaberemo (x_0, y_0) proizvoljno.
- U svakoj iteraciji:
  - Na slučajan način (sa verovatnoćama p_i) biramo jedno od k mogućih preslikavanja F_i.
  - $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F_i(x_n, y_n)$.

Kohova pahulja (IFS)

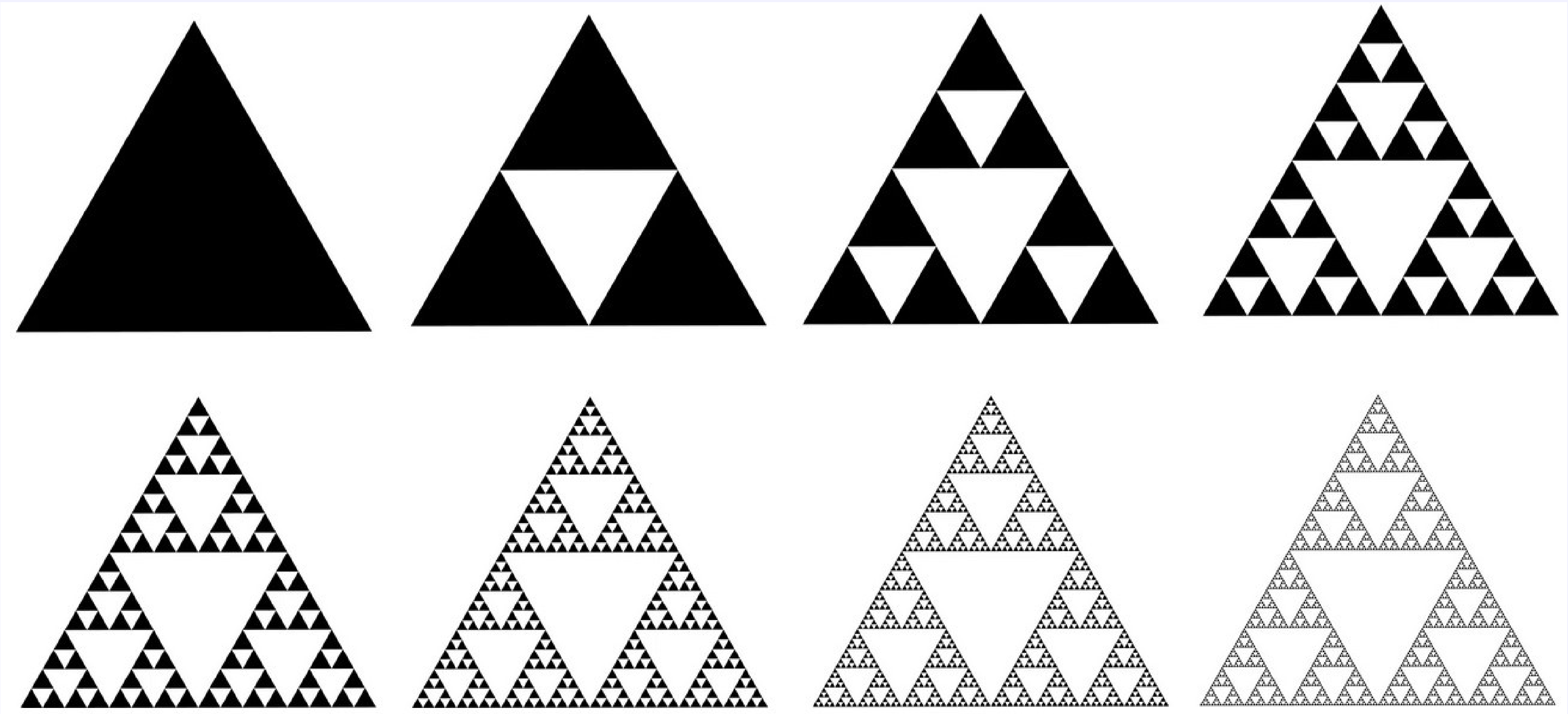
$$F_1(x,y) = \left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y\right)$$
$$F_2(x,y) = \left(\tfrac{1}{6}x - \tfrac{\sqrt{3}}{6}y + \tfrac{1}{3}, \tfrac{\sqrt{3}}{6}x + \tfrac{1}{6}y\right)$$
$$F_3(x,y) = \left(\tfrac{1}{6}x + \tfrac{\sqrt{3}}{6}y + \tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{6}x + \tfrac{1}{6}y + \tfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$$
$$F_4(x,y) = \left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y\right)$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \tfrac{1}{4}$$



Trougao Sjerpinskog

Geometrijska konstrukcija

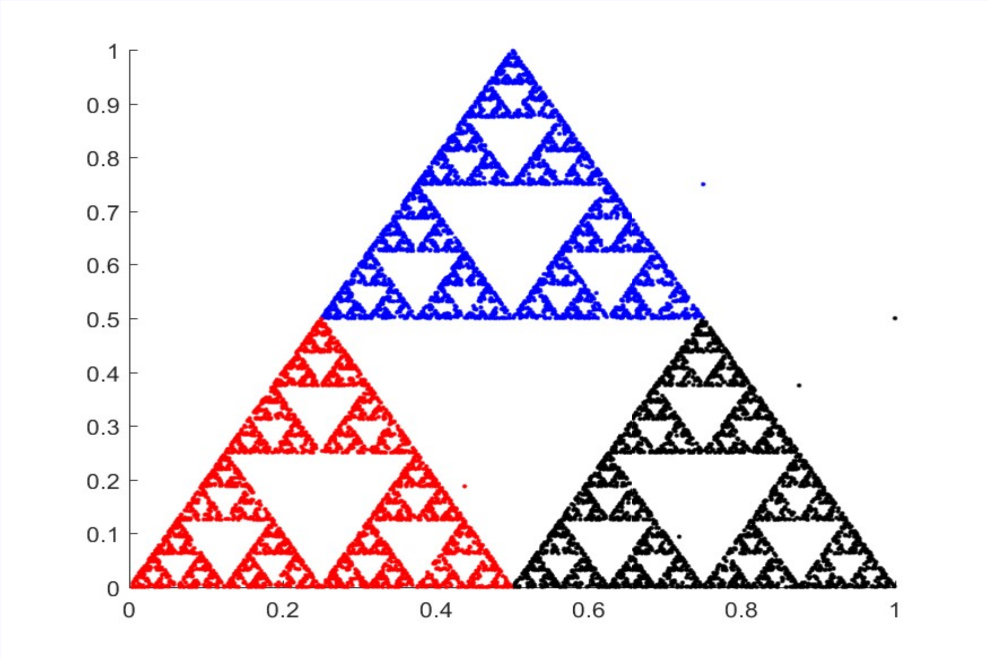


Potpuno sličan fraktal, površina teži nuli, $D = \log_2 3 = 1.585$.

Trougao Sjerpinskog (IFS)

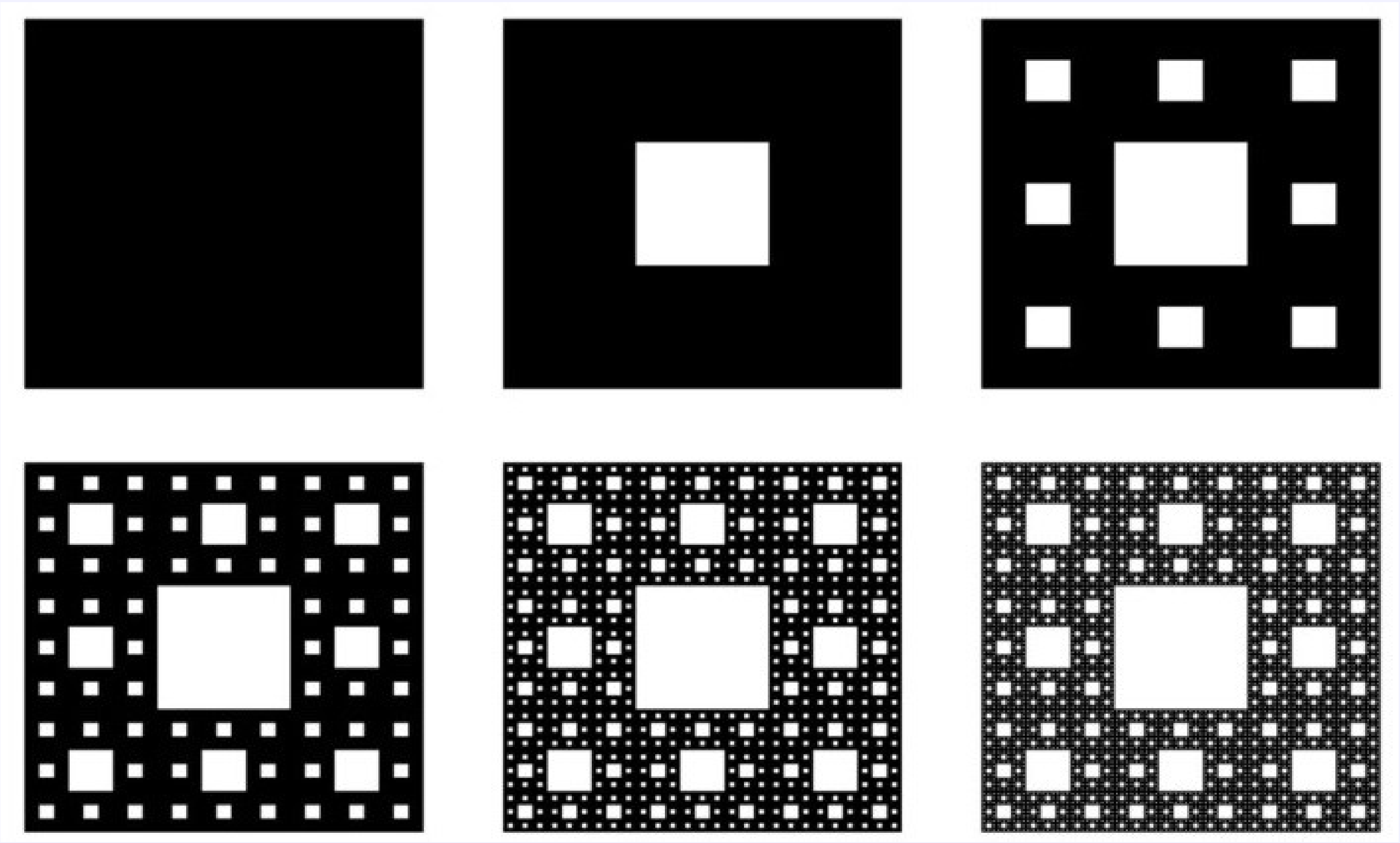
$$F_1(x,y) = (\tfrac{x}{2}, \tfrac{y}{2})$$
$$F_2(x,y) = (\tfrac{2x+1}{4}, \tfrac{y+1}{2})$$
$$F_3(x,y) = (\tfrac{x+1}{2}, \tfrac{y}{2})$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = \tfrac{1}{3}$$

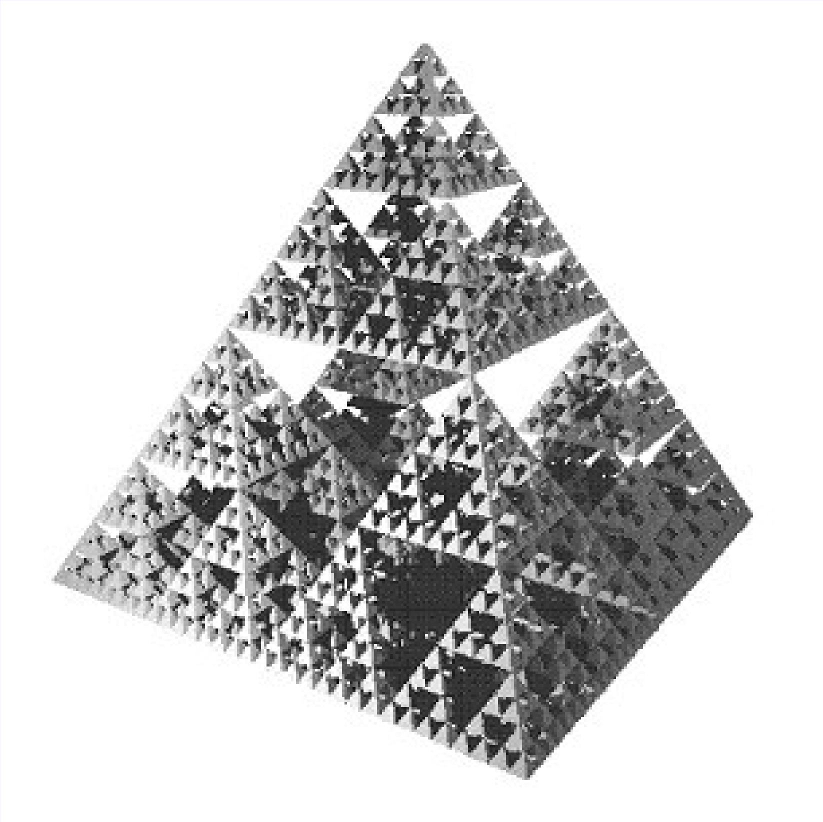


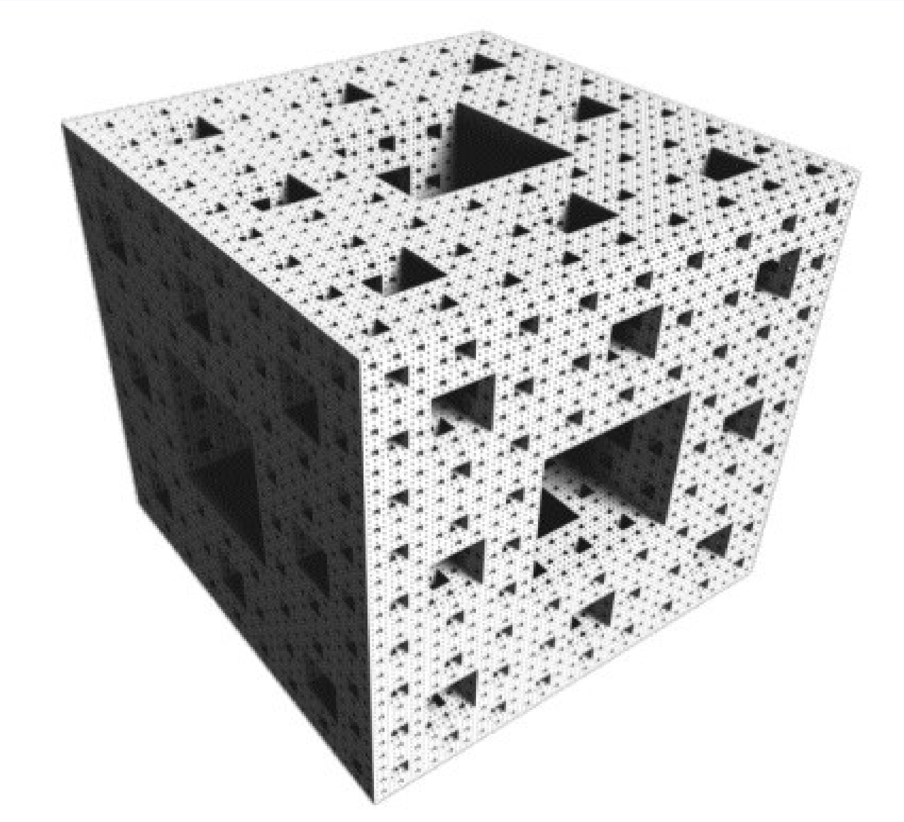
- F_1 je homotetija (skupljanje za faktor 2 oko koordinatnog početka).
- F_2 i F_3 su linearne transformacije.
- x-koordinata utiče samo na x-koordinatu nove tačke. Analogno za y-koordinatu.

Tepih Sjerpinskog



3D verzije





Sjerpinski piramida i Mengerov sunđer

Objekti beskonačne površine, ali zapremina im konvergira ka nuli.

Barnslijeva paprat

$$F_1(x,y) = (0.85x + 0.04y + 0.075, -0.04x + 0.085y + 0.018)$$
$$F_2(x,y) = (0.2x - 0.26y + 0.4, 0.23x + 0.22y + 0.045)$$
$$F_3(x,y) = (-0.15x + 0.25y + 0.575, 0.26x + 0.24y - 0.086)$$
$$F_4(x,y) = (0.5, 0.16x)$$

$$p_1 = 0.77, p_2 = 0.12, p_3 = 0.10, p_4 = 0.01$$